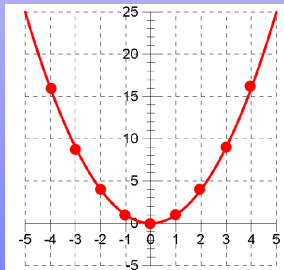


Tema 1: Funcions

Funcions reals de variable real

$$f(x) = x^2$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{2}$
f(x)	9	4	1	0	1	4	9	2



Punts de tall amb els eixos

- **Eix vertical (ordenades):** ordenada a l'origen o bé imatge del zero: només cal calcular $f(0)$. El punt és de la forma $(0, f(0))$
- **Eix horitzontal (abscisses):** busquem el valor de x que fa que $f(x) = 0$, són punts de la forma $(x_0, 0)$. Cal resoldre l'equació:

$$f(x) = 0$$

Domini d'una funció

No tots els valors de x tenen perquè tenir imatge.

Definició

Domini: són tots els valors d' x pels quals la funció ens retorna algun valor (tenen imatge)

Motius pels quals una funció no retorna alguna valor:

- Denominadors que s'anul·len: caldrà veure per quins valors d' x el denominador s'anul·la i treure aquells valors del domini.
- Arrels que es fan negatives.
- Funcions definides a trossos: cal assegurar-se que estiguin ben definides als canvis de branca.
- Logaritmes que s'anul·len o són negatius.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

Domini:

$$x + 2 = 0 \implies x = -2$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Punts de tall amb els eixos:

- Eix d'ordenades: $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$

$$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

Exemple

- Eix d'abscisses:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$$

$$(-1, 0)$$

$$(1, 0)$$

Observeu!

En funcions racionals (fraccions de polinomis):

- Per trobar el domini ens fixem només en el denominador, volem saber quan val 0 aquells valors caldrà treure'ls.
- Per trobar els punts de tall amb OX busquem quan el numerador val 0. Després caldrà comprovar que solució sigui del domini (el denominador no s'anul·li)

Taula de valors

x	$f(x)$
0	$-\frac{1}{2}$
1	0
-1	0
2	$\frac{3}{4}$
-2	$\frac{7}{4}$

Exemple 2

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$$

Domini: lo de dins de l'arrel (radicand) no pot ser negatiu.

- 1 Mirem quan val 0: $x^2 - x - 6 = 0 \implies x = -2$ i $x = 3$
- 2 Mirem quan és negatiu avaluant el radicand:



- 3 Ens quedem amb els valors que fan que el radicand sigui positiu o 0:

$$D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$$

Rectes

Excepte les verticals, són de la forma:

$$y = mx + n$$

- m : pendent de la recta
- n : ordenada a l'origen (punt de talla amb l'eix vertical o d'ordenades), ja que $f(0) = n$

Paràboles

Les que tenen l'eix vertical són de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Si $a > 0$ mira amunt (convexa)
- Si $a < 0$ mira avall (còncava)
- Punt de tall amb l'eix d'ordenades (vertical): $(0, c)$, ja que $f(0) = c$
- Punts de tall amb l'eix d'abscisses. N'hi pot haver un, dos o cap, segons el nombre de solucions de l'equació:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Vèrtex de la paràbola: la coordenada x ve donada per la fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$. Per trobar la coordenada y només cal substituir $x = x_v$.

Funcions definides a trossos

Són funcions de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \text{funció 1} & \text{Si } x \dots \\ \text{funció 2} & \text{Si } x \dots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Exercici

Fer la gràfica de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

És contínua la funció?

Exercici

Trobar el domini, els punts de tall amb els eixos i fer la gràfica de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 5x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercici

Domini, punts de tall, vèrtexs i gràfica de les funcions

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{3} + 3x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solució

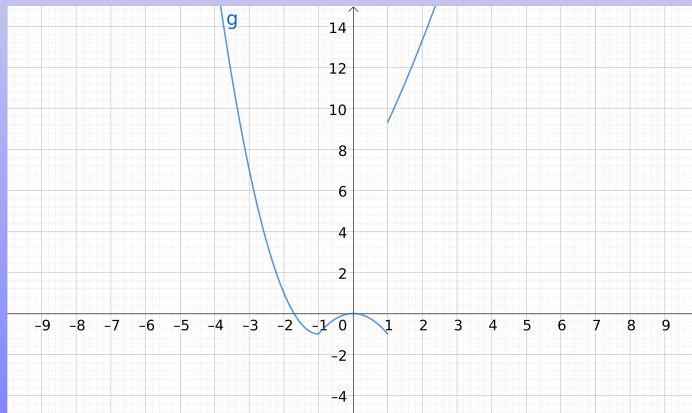
$D(g) = \mathbb{R}$ perquè les branques no presenten problemes i g està ben definida a $x = -1$ i $x = 1$. La funció talla l'eix d'ordenades a $(0, g(0)) = (0, 0)$.

Troblem els punts notables de les tres branques

- a) Operant: $2(x+1)^2 - 1 = 2x^2 + 4x + 1$ Tall abscesses:
 $2x^2 + 4x + 1 = 0 \implies x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$. Com $x_2 > -1$, a la primera branca només tenim un tall: $\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. El vèrtex es trobarà a $x = -1$, just on es canvia de branca. Aquest punt seria $(-1, -1)$, l'haurem de pintar de blanc.
- b) La paràbola mira cap avall perquè $a = -1$. Tall abscesses: $-x^2 = 0 \implies x = 0$, i tenim només un tall, el $(0, 0)$, que és el mateix punt de tall que les ordenades. El vèrtex es troba a $x = 0$ i per tant és el $(0, 0)$.
- c) Tall abscesses: $\frac{x^2}{3} + 3x + 6 = 0 \implies x_1 = -3$, $x_2 = -6$. Cap d'ells compleix $x > 1$, per tant no talla.

Solució

La gràfica quedarà:



Funció valor absolut

La funció “valor absolut” és una funció definida a trossos: cal canviar el signe quan s'avalua en valor negatiu:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

Exercici valor absolut

Domini, punts de tall, vèrtexs i gràfica de la funció

$$f(x) = |2x - 3| \qquad g(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

Solució

Troblem quan hi ha un canvi de signe:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$$

Avaluant en algun punt a l'esquerra de l'1, entre 1 i 3 i a la dreta del 3 trobem

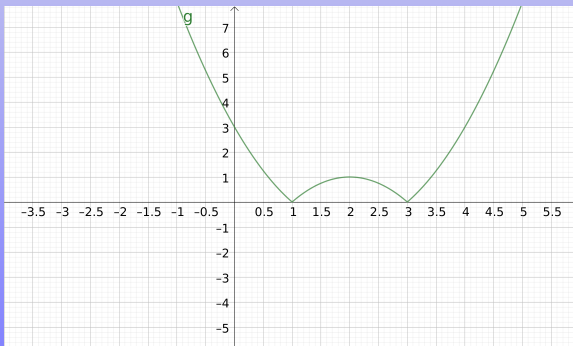


Per tant la funció la podem escriure com:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solució

Per fer la gràfica, com ja tenim el tall amb l'eix x , ens caldrà algun punt i trobar el vèrtex. Aquest es trobarà a la branca del mig: $x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow (2, g(2)) = (2, 1)$. Com a punts extrems donem per exemple el $(0, 3)$ (1a branca) i el $(4, 3)$ (3a branca).



Domini i punts de tall amb els eixos en funcions definides a trossos

Domini

- Caldrà veure per cadascuna de les branques per quin valor s'anul·la el denominador
- Caldrà comprovar si els valors trobats compleixen la condició per entrar a la branca en concret. De no ser així, aquell valor caldrà descartar-lo.

Punts de tall amb l'eix OX

- Caldrà igualar a 0 cadascuna de les branques i resoldre cadascuna de les equacions
- Posteriorment, caldrà comprovar que els valors trobats compleixen la condició per entrar a la branca corresponent.

Composició de funcions

Composar dues funcions vol dir “ficar-ne una dins l'altra”. És a dir, primer fem una i el que ens dóna ho fem dins l'altra. Ho escriurem així:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Composició de funcions

Composar dues funcions vol dir “ficar-ne una dins l'altra”. És a dir, primer fem una i el que ens dóna ho fem dins l'altra. Ho escriurem així:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Exemple:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad g(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

aleshores

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x+2}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-1} + 2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = \frac{3\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} - 1}$$

Propietats de la composició

- 1 No és commutativa

Propietats de la composició

- 1 No és commutativa
- 2 Element neutre: és la funció $Id(x) = x$, és la funció que no fa res

Propietats de la composició

- 1 No és commutativa
- 2 Element neutre: és la funció $Id(x) = x$, és la funció que no fa res
- 3 Funció inversa. La funció inversa d'una funció desfà la funció: agafa imatges i les associa a les seves antiimatges. És a dir, la seva variable independent passar a ser y , i la dependent la x . S'escriu d'aquesta manera: $f^{-1}(y)$

Inspecció ràpida

Volem veure què fa f quan x **creix molt** (anem a la dreta) o bé quan x la fem **molt petita** (essent negativa, anem a l'esquerra). És a dir, volem veure quan valen els límits

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

A la pràctica fem una primera inspecció substituint x per infinit, i mirem què passa.

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\frac{\infty}{0} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- f) $\frac{0}{\infty} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- f) $\frac{0}{\infty} \rightarrow 0$
- g) k^∞

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- f) $\frac{0}{\infty} \rightarrow 0$
- g) k^∞ Això pot donar o bé 0 o bé $\pm \infty$, dependrà de si $|k| < 1$ o no i del seu signe.

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

1)
$$\frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

1) $\frac{\infty}{\infty}$

2) $\frac{0}{0}$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

- 1) $\frac{\infty}{\infty}$
- 2) $\frac{0}{0}$
- 3) $\infty - \infty$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

- 1) $\frac{\infty}{\infty}$
- 2) $\frac{0}{0}$
- 3) $\infty - \infty$
- 4) $0 \cdot \infty$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

- 1) $\frac{\infty}{\infty}$
- 2) $\frac{0}{0}$
- 3) $\infty - \infty$
- 4) $0 \cdot \infty$
- 5) 0^0

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

- 1) $\frac{\infty}{\infty}$
- 2) $\frac{0}{0}$
- 3) $\infty - \infty$
- 4) $0 \cdot \infty$
- 5) 0^0
- 6) 1^∞

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

- 1) $\frac{\infty}{\infty}$
- 2) $\frac{0}{0}$
- 3) $\infty - \infty$
- 4) $0 \cdot \infty$
- 5) 0^0
- 6) 1^∞
- 7) ∞^0

Límits de funcions racionals: indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

- 1 Ens quedem només amb el terme de grau més alt, tant al numerador com al denominador
- 2 Simplifiquem

Límits de funcions racionals: indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

- 1 Ens quedem només amb el terme de grau més alt, tant al numerador com al denominador
- 2 Simplifiquem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 2x + 3}{x^3 + 2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x + 3x^3}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

Límits de funcions racionals

Podem anar més ràpid:

$$f(x) = \frac{ax^p + \text{grau més baix}}{bx^q + \text{grau més baix}}$$

aleshores només hem de comparar els graus i vigilar amb els signes.

Límits de funcions racionals

Podem anar més ràpid:

$$f(x) = \frac{ax^p + \text{grau més baix}}{bx^q + \text{grau més baix}}$$

aleshores només hem de comparar els graus i vigilar amb els signes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } p = q \implies \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \implies 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Asímtota horitzontal} \\ \text{per la dreta} \end{array} & \begin{cases} \bullet y = \frac{a}{b} \\ \bullet y = 0 \end{cases} \\ \bullet \text{ Si } p > q \begin{cases} \bullet \text{ Si } a \text{ i } b \text{ mateix signe} \implies +\infty \\ \bullet \text{ Si } a \text{ i } b \text{ diferent signe} \implies -\infty \end{cases} & \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } p = q \Rightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \Rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ Asímtota horitzontal per l'esquerra } \left\{ \begin{array}{l} \bullet y = \frac{a}{b} \\ \bullet y = 0 \end{array} \right.$$

$$\bullet \text{ Si } p > q \left\{ \begin{array}{l} \text{Signe de } a \text{ i } b \\ \text{igual} \\ \text{diferent} \end{array} \right\}$$

Paritat de p i q			
Signe de a i b		igual	diferent
		igual	diferent
igual		$+\infty$	$-\infty$
diferent		$-\infty$	$+\infty$

Asímtotes horitzontals

Són rectes horitzontals, de la forma

$$y = n$$

La funció s'hi apropa en créixer o decreïxer x :

$$\text{Asímtota horitzontal} \begin{cases} - \text{ Per la dreta si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = n \\ - \text{ Per l'esquerra si } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = n \end{cases}$$

Asímptotes horitzontals

Per exemple,

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{x^3 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

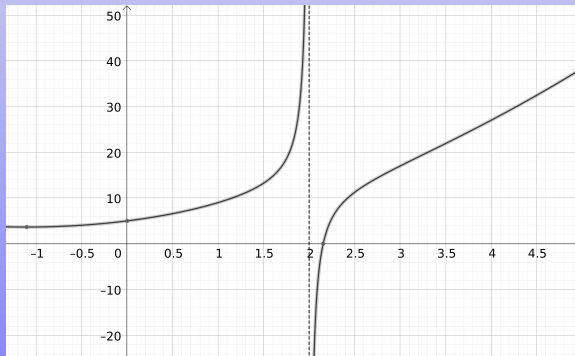
Per tant té una asímptota horitzontal que és la recta

$$y = 3$$

tant per la dreta com per l'esquerra.

Asímtotes horitzontals

La seva gràfica és



Exercicis:

Trobeu el domini, punts de tall amb els eixos i les possibles asímtotes horitzontals de les següents funcions

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^3 - x}$$

$$g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} =$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2} =$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 3x^3 - x + 1) =$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2 - 4x^2}{1 - 9x^2}}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{5x + 2} =$$

Solucions

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{3x^2} = -\frac{5}{3} \quad \text{Per tant,} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = -\frac{5}{3} \implies \boxed{y = -\frac{5}{3}}$$

Solucions

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{3x^2} = -\frac{5}{3}$ Per tant, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{4x} = \frac{7}{\infty} = 0$ Per tant, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Solucions

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 5x^2}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{3x^2} = -\frac{5}{3}$ Per tant, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{3}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{4x} = \frac{7}{\infty} = 0$ Per tant, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 3x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^5 = -\infty$ No té A.H.

Solucions

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{x} - 5x^2}{3x^2\cancel{+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{5}{3} \quad \text{Per tant,} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{3}}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7\cancel{x}\cancel{3}}{4x^2\cancel{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{4x} = \frac{7}{\infty} = 0 \quad \text{Per tant,} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 3x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^5 = -\infty \quad \text{No té A.H.}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2\cancel{-4x^2}}{1\cancel{-9x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-4\cancel{x^2}}{-9\cancel{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}}$$

Solucions

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{x} - 5x^2}{3x^2\cancel{+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{5}{3} \quad \text{Per tant,} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{3}}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7\cancel{x}\cancel{3}}{4x^2\cancel{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{4x} = \frac{7}{\infty} = 0 \quad \text{Per tant,} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 3x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^5 = -\infty \quad \text{No té A.H.}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2\cancel{-4x^2}}{1\cancel{-9x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-4\cancel{x^2}}{-9\cancel{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{5x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3\cancel{x^2}}{5\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{5} = -\infty \quad \text{No té A.H.}$$

Exemples

$$\textcircled{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x + 2x^2 - x^4)$$

$$\textcircled{g)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 7} =$$

$$\textcircled{h)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{x^2 + 4} =$$

$$\textcircled{i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3}{2x^3 - x^2 + 2x + 7} =$$

Solucions

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x + 2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty$ No té A.H.

Solucions

$$\textcircled{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x + 2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty \text{ No té A.H.}$$

$$\textcircled{g)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3} = -\infty \text{ No té A.H.}$$

Solucions

$$\textcircled{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x + 2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty \text{ No té A.H.}$$

$$\textcircled{g)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3} = -\infty \text{ No té A.H.}$$

$$\textcircled{h)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2}{x} = 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{2}{x} = 0 \implies \boxed{y = 0}$$

Solucions

$$\textcircled{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x + 2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty \text{ No té A.H.}$$

$$\textcircled{g)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3} = -\infty \text{ No té A.H.}$$

$$\textcircled{h)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2}{x} = 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{2}{x} = 0 \implies \boxed{y = 0}$$

$$\textcircled{i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3}{2x^3 - x^2 + 2x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x = \pm\infty \text{ No té A.H.}$$

Exercici:

Trobar el domini, punts de tall amb els eixos i límits de la funció a $\pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-4} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2-5x-6}{2x^2-18} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Límits laterals

Mirem què li passa a la funció quan x s'apropa a un valor:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

<https://www.geogebra.org/m/pbpnfbzz>

En alguns casos haurem de distingir entre apropar-se per la dreta o per l'esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+)$$

Ens apropem a $x = a$ per la dreta

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-)$$

Ens apropem a $x = a$ per l'esquerra

Límits laterals

Coses que ens poden passar en fer

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- 1 Tenim una funció definida a trossos que canvia justament en $x = a$: per una banda farem servir una branca i per l'altra l'altra
- 2 En $x = a$ se'ns anul·la el denominador però el numerador no. Això ens donarà ∞ o $-\infty$, haurem de mirar el signe a cada banda
- 3 En $x = a$ se'ns anul·len tant numerador com denominador: Això ens donarà una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, que resoldrem simplificant.

Asímtotes verticals

Són rectes de la forma

$$x = a$$

on la funció té una **discontinuitat** asimptòtica. Per tant tenim

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

La funció s'apropa a la recta quan x s'apropa a a .

Asímtotes verticals

Per exemple,

$$f(x) = \frac{x^3 - 10}{x - 2}$$

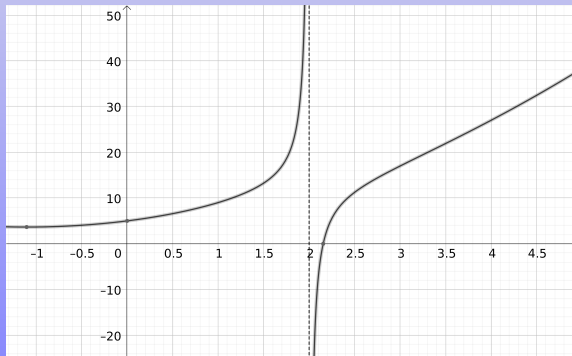
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-18}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-18}{0^+} = -\infty$$

té una asímtota vertical que és la recta $x = 2$.

Asímtotes verticals

La seva gràfica, prop de $x = 2$ és



Límits laterals en funcions definides a trossos

Si tenim

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq a \\ f_2(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

aleshores

$$f(a^+) = f_1(a^+)$$

$$f(a^-) = f_2(a^-)$$

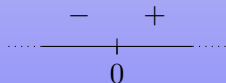
Límits laterals en denominadors que s'anul·len

Si se'ns anul·la el denominador però el numerador no, només caldrà mirar el signe a cada banda. Per exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

S'anul·la el denominador en $x = 0$, però el numerador no.

Mirem el signe del denominador a banda i banda:



Per tant tindrem

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Si en fer el límit se'ns anul·len tant numerador com denominador, haurem de simplificar. Per fer-ho farem, tant a numerador com denominador:

- ❶ Treure factor comú, si es pot: $x^5 + x^3 - x^2 = x^2 (x^3 + x - 1)$
- ❷ Fer que el coeficient de grau més alt sigui 1: $2x^2 - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2})$ o $9 - x^2 = -(x^2 - 9)$
- ❸ Busquem les arrels: $x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = 1$ i $x = 2$
- ❹ Factoritzem: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$
- ❺ Alternativament podem identificar identitats notables: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ o $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
- ❻ Simplificar factors repetits al numerador i denominador: $\frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{(x-2)\cancel{(x+3)}} = \frac{x+5}{(x-2)(x+3)}$

Exemple

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Exemple

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Factoritzant tenim:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x - 1}}{(x + 1) \cdot \cancel{(x - 1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

i no cal fer els límits laterals, perquè donen el mateix.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

Comencem substituïnt x per 1 aviam què surt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminació: caldrà factoritzar i simplificar}$$

Per factoritzar trobem les arrels del numerador i denominador:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\implies x = \pm 1 \\ x^2 - 2x + 1 &\implies x = 1 \text{ (arrel doble)} \end{aligned}$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0}$$

$\Rightarrow$ Cal mirar els límits laterals!

Estudiem el canvi de signe del denominador en $x = 1$:

$$\begin{array}{c} - \qquad \qquad + \\ \hline \dots - \quad | \quad - \quad \dots \\ \qquad \qquad 1 \end{array}$$

Per tant:

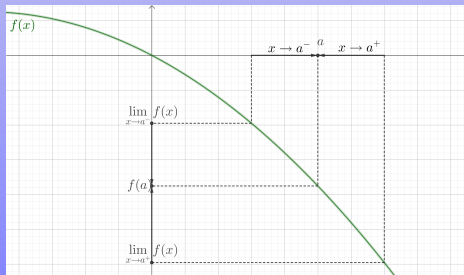
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Continuïtat

Una funció és contínua en $x = a$

si en apropar x a a $f(x)$ s'apropa a $f(a)$:

<https://www.geogebra.org/m/qpwezu4b>



Continuïtat

Definició

Diem que una funció és contínua en $x = a$ si en apropar x a a obtenim el valor de la imatge d' a . És a dir, $f(x)$ és contínua en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

que és el mateix que dir

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

Motius pels quals una funció podria no ser contínua

Principalment:

- ❶ Punts que no són del domini:
 - ❶ Denominadors que s'anul·len
 - ❷ arrels d'índex parell que es fan negatives
 - ❸ altres: logaritmes que es fan 0, etc
- ❷ Punts on funcions definides a trossos canvien de branca

Tipus de discontinuïtats

<https://www.geogebra.org/m/pbpnfbzz>

- De salt
- Asimptòtica
- Evitable

Discontinuitat de salt

Salt

Diem que $f(x)$ té una discontinuïtat de salt en $x = a$ si els límits laterals existeixen (no són infinit) però són diferents:

$$f(a^-) \neq f(a^+)$$

Discontinuitat de salt

Salt

Diem que $f(x)$ té una discontinuïtat de salt en $x = a$ si els límits laterals existeixen (no són infinit) però són diferents:

$$f(a^-) \neq f(a^+)$$

Les trobem en funcions definides a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} f(1^-) = 0 \\ f(1^+) = -1 \end{cases}$$

Té una discontinuïtat de salt en $x = 1$.

Discontinuitat asimptòtica

Discontinuitat asimptòtica

Diem que $f(x)$ té una discontinuïtat asimptòtica en $x = a$ si algun dels dos límits laterals és $+\infty$ o $-\infty$:

$$f(a^-) = \pm\infty \text{ o } f(a^+) = \pm\infty$$

Discontinuitat asimptòtica

Discontinuitat asimptòtica

Diem que $f(x)$ té una discontinuitat asimptòtica en $x = a$ si algun dels dos límits laterals és $+\infty$ o $-\infty$:

$$f(a^-) = \pm\infty \text{ o } f(a^+) = \pm\infty$$

Les trobem quan el denominador s'anul·la però el numerador no:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1} \implies \begin{cases} f(1^-) = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ f(1^+) = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Té una discontinuitat asimptòtica en $x = 1$.

Discontinuitat evitable

Evitable

Diem que $f(x)$ té una discontinuïtat evitable en $x = a$ si els límits laterals existeixen (són finits), són igual però no coincideixen amb el valor de la funció en $x = a$. La funció té un “forat” que es pot evitar “omplint-lo”.

Discontinuitat evitable

Evitable

Diem que $f(x)$ té una discontinuïtat evitable en $x = a$ si els límits laterals existeixen (són finits), són igual però no coincideixen amb el valor de la funció en $x = a$. La funció té un “forat” que es pot evitar “omplint-lo”.

Les trobem quan hi ha cancel·lacions al numerador i denominador:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \implies \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(\cancel{x - 1})}{\cancel{x - 1}} = 2$$

D'una banda $f(1)$ no existeix perquè $x = 1$ no és del domini, però en canvi tenim

$$f(1^+) = f(1^-) = 2$$