INS Pere Vives i Vich
Departament de matemàtiques

Dossier d'exercicis

Tema 7: funcions

4^{rt} ESO

Curs 2025-2026

Nom i Cognoms: ______________________________

Índex

1 Imatges i antiimatges

Exercici 1: Càlcul elemental d'imatges

Donada la funció $f(x) = 3x - 7$, calcula:

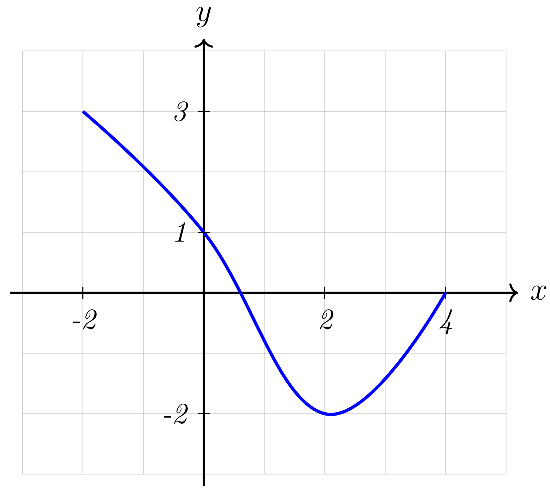
a) *L'imatge de $x = 4$.*

b) *L'imatge de $x = -2$.*

c) $f(0)$ *i* $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercici 2: Lectura gràfica bàsica

Observa la següent gràfica de la funció $g(x)$ i determina els valors demanats:



a) *Troba* $g(-2)$ *i* $g(2)$.

b) *Quina és l'antiimatge de* $y = 0$*?*

c) *Té el valor* $y = 4$ *alguna antiimatge? Raona la resposta.*

Exercici 3: Antiimatges de funcions quadràtiques

Considera la funció $h(x) = x^2 - 9$. Troba, si existeixen, les antiimatges dels següents valors:

a) $y = 0$

b) $y = 7$

c) $y = -10$

Exercici 4: Interpretació de límits gràfics

Dibuixa una funció que compleixi les següents condicions i respon:

- *L'imatge de* 0 *és* 2.
- *El valor* $y = -3$ *té dues antiimatges.*

- *El valor $y = 5$ no té cap antiimatge.*

Exercici 5: Funció amb radical
Donada la funció $p(x) = \sqrt{x+5}$:

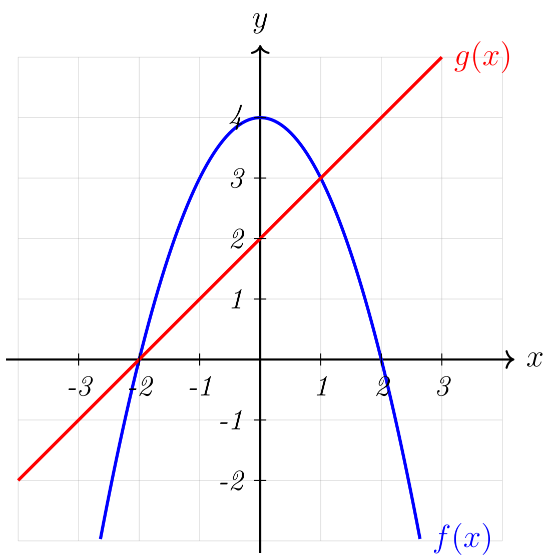
a) *Calcula l'imatge de $x = 11$ i $x = -1$.*

b) *Troba l'antiimatge de $y = 3$.*

c) *Explica analíticament per què el valor $y = -2$ no pot tenir cap antiimatge en aquesta funció.*

2 Punts de tall amb els eixos i entre funcions

Exercici 6: Lectura gràfica de punts de tall
Observa la següent representació on hi apareixen dibuixades una paràbola $f(x)$ i una recta $g(x)$:



A partir de la gràfica, determina les coordenades (x, y) dels següents punts:

a) *Els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix de les abscisses (eix X) i amb l'eix de les ordenades (eix Y).*

b) *Els punts de tall de la funció $g(x)$ amb els eixos de coordenades.*

c) *Els punts de tall entre les dues funcions $f(x)$ i $g(x)$.*

Exercici 7: Talls amb els eixos (Factor comú i 2n grau)
Troba analíticament els punts de tall amb els eixos de coordenades (eix X i eix Y) de les següents funcions:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $g(x) = x^3 - 4x$

Exercici 8: Intersecció entre funcions quadràtiques i lineals
Donades les funcions $p(x) = x^2 - 4x + 3$ i $q(x) = x + 3$.

a) *Calcula en quins punts es tallen les dues gràfiques.*

b) *Què significa gràficament el resultat obtingut?*

Exercici 9: Talls amb els eixos (Equació biquadrada)
Calcula els punts de tall amb els eixos de coordenades de la funció $h(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

Exercici 10: Intersecció amb equacions de grau superior
Troba els punts on es tallen les gràfiques de les funcions $f(x) = x^4 - 3x^3$ i $g(x) = 4x^2$. Pista: Igualar, agrupar termes a un sol costat i treure factor comú.

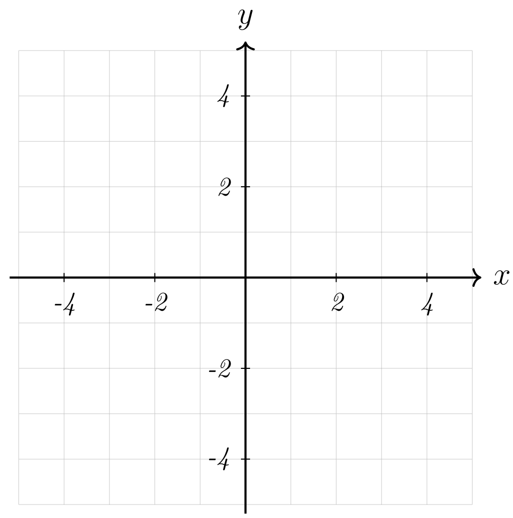
3 Estudi de paràboles i punts de tall

Exercici 11: Paràbola incompleta
Donada la funció quadràtica $f(x) = x^2 - 4$:

a) *Calcula les coordenades del vèrtex.*

b) *Troba els punts de tall amb l'eix de les abscisses (eix X) i amb l'eix de les ordenades (eix Y).*

c) *Fes un esbós de la seva gràfica en el següent sistema de coordenades:*



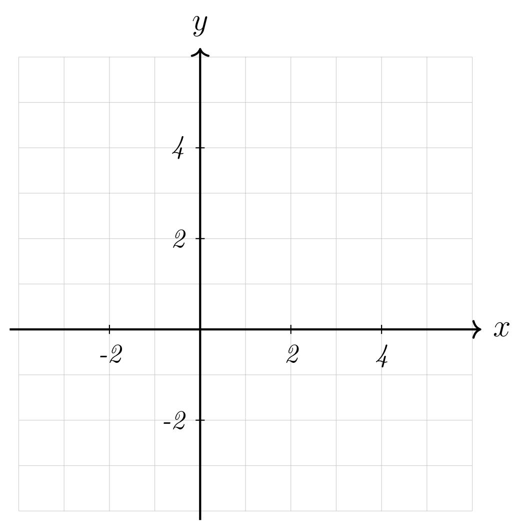
Exercici 12: Anàlisi completa d'una paràbola

Considera la paràbola definida per l'equació $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) *Troba analíticament el vèrtex i els punts de tall amb els eixos coordenats.*

b) *Observant el signe del coeficient de grau 2, indica cap a on estan orientades les branques de la paràbola.*

c) *A partir de la informació anterior, fes-ne la representació gràfica:*



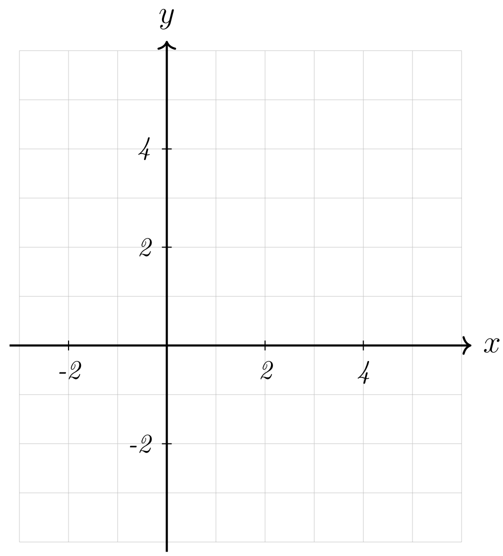
Exercici 13: Intersecció entre paràboles

Donades les funcions $p(x) = x^2 - 4x + 3$ *i* $q(x) = -x^2 + 2x + 3$*:*

a) Calcula els vèrtexs de cadascuna d'elles.

b) Troba analíticament els punts de tall entre les dues funcions $p(x)$ i $q(x)$. Pista: Iguala les dues expressions.

c) Representa ambdues paràboles en el següent sistema de coordenades per comprovar gràficament que els punts de tall obtinguts coincideixen.



Exercici 14: Càlcul amb fraccions: vèrtexs i punts de tall

Calcula analíticament les coordenades del vèrtex i els punts de tall amb els eixos de coordenades de les següents paràboles amb coeficients fraccionaris:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

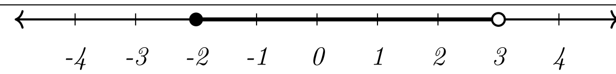
b) $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

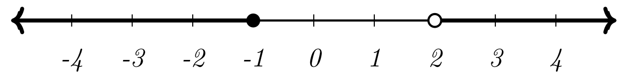
c) $h(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

4 Inequacions, intervals i monotonia

Exercici 15: De la representació gràfica a l'interval

Escriu en forma d'interval i com a inequació els conjunts de nombres reals representats en les rectes següents:

a) 

b) 

Exercici 16: D'inequacions a intervals

Expressa les següents relacions d'ordre en forma d'interval o unió d'intervals:

a) $x > -4$

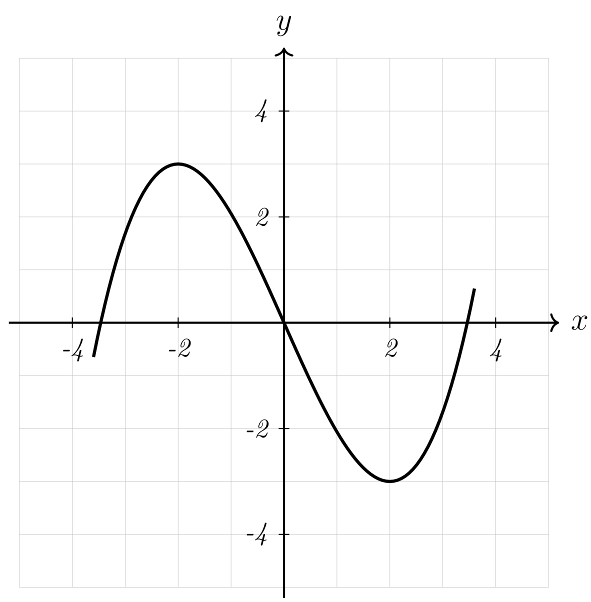
b) $0 \leq x < 8$

c) $x \leq -2$ *o* $x > 5$

d) *Tots els nombres reals més grans o iguals que* 3 *i estrictament més petits que* 10*.*

Exercici 17: Monotonia a partir de la gràfica

Observa la gràfica de la funció $f(x)$ *i escriu en forma d'interval els conjunts on la funció és creixent i on és decreixent:*



Nota: Recorda utilitzar sempre els valors de l'eix X *i intervals oberts per expressar la monotonia.*

Exercici 18: Creixement i decreixement analític

Determina els intervals de creixement i decreixement de les següents funcions donades per la seva expressió algebraica. Recordatori: en el cas de les paràboles, necessitaràs trobar primer la coordenada x del vèrtex.

a) $g(x) = 3x - 7$

b) $h(x) = x^2 - 4x + 1$

c) $p(x) = -2x^2 - 12x$

Exercici 19: Diferenciant conceptes: Positivitat vs Monotonia

Donada la funció quadràtica $f(x) = -x^2 + 6x - 5$:

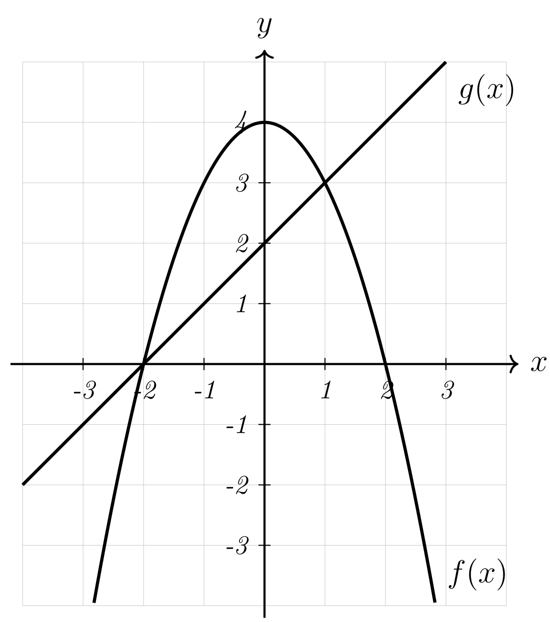
a) *Calcula els punts de tall amb l'eix X i, imaginant-te un esbós de la paràbola, escriu l'interval on la funció és **positiva** (les y són positives).*

b) *Calcula el vèrtex i escriu l'interval on la funció és **creixent**.*

c) *Explica amb les teves paraules per què aquests dos intervals no coincideixen, tot i referir-se a la mateixa funció.*

Exercici 20: Resolució gràfica d'inequacions entre funcions

A la següent figura es mostren les gràfiques d'una paràbola $f(x)$ i una recta $g(x)$.



A partir de la simple observació visual de la gràfica, determina:

a) *Els punts de tall entre $f(x)$ i $g(x)$.*

b) *L'interval o intervals on es compleix que $f(x) > g(x)$ (és a dir, on la paràbola està per sobre de la recta).*

c) *L'interval o intervals on es compleix que $f(x) \leq g(x)$.*

Exercici 21: Resolució analítica d'inequacions

Donades les funcions $p(x) = x^2 - 4x + 3$ i $r(x) = -x + 3$. Volem trobar analíticament en quin interval de la recta real es compleix que la paràbola està per sota de la recta, és a dir, $p(x) < r(x)$. Per fer-ho, segueix aquests passos:

a) *Calcula primer els punts de tall igualant les dues funcions ($p(x) = r(x)$). Aquests valors de x dividiran la recta real en diversos intervals.*

b) *Agafa un valor de prova de dins de cada interval per veure si es compleix la desigualtat $p(x) < r(x)$.*

c) *Escriu la solució final en forma d'interval.*

5 Resolució d'equacions per factorització

Exercici 22: Equacions de grau 3 amb una solució coneguda

Resol les següents equacions de tercer grau. Per ajudar-te a començar, et donem una de les solucions de l'equació. Fes servir la divisió de polinomis per rebaixar el grau de l'equació a 2 i trobar les solucions restants:

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ *(sabent que $x = 2$ n'és una solució).*

b) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ *(sabent que $x = 1$ n'és una solució).*

Exercici 23: Equacions de grau 4 amb solucions conegudes

En les equacions de quart grau necessitem fer dues divisions successives per arribar a tenir una equació de segon grau que sapiguem resoldre. Troba totes les solucions d'aquestes equacions sabent-ne dues d'elles:

a) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$ *(sabent que $x = 1$ i $x = -1$ en són solucions).*

b) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ *(sabent que $x = -1$ i $x = 2$ en són solucions).*

Exercici 24: Equacions de grau 3 sense pistes

Resol les següents equacions de tercer grau de forma autònoma. Pista: Busca una primera solució de l'equació provant amb els divisors del terme independent. Un cop la tinguis, divideix per rebaixar el grau com en l'exercici anterior.

a) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$

b) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$

Solucions

Solució Exercici 1.

a) $f(4) = 5$; b) $f(-2) = -13$; c) $f(0) = -7$ i $f(1/3) = -6$.

Solució Exercici 2.

a) $g(-2) = 3$, $g(2) = -2$; b) $x = 4$; c) No, la gràfica no arriba al valor $y = 4$ en l'interval mostrat.

Solució Exercici 3.

a) $x = 3, x = -3$; b) $x = 4, x = -4$; c) No en té (l'equació $x^2 = -1$ no té solució real).

Solució Exercici 4.

Resposta oberta segons el dibuix de l'alumne, comprovant que el recorregut no inclogui $y = 5$.

Solució Exercici 5.

a) $p(11) = 4$, $p(-1) = 2$; b) $x = 4$; c) Una arrel quadrada positiva mai pot donar com a resultat un nombre negatiu.

Solució Exercici 6.

a) Tall amb eix X: $(-2, 0)$ i $(2, 0)$. Tall amb eix Y: $(0, 4)$.
b) Tall amb eix X: $(-2, 0)$. Tall amb eix Y: $(0, 2)$.
c) S'intersequen en els punts $(-2, 0)$ i $(1, 3)$.

Solució Exercici 7.

a) Eix Y: $(0, 6)$. Eix X: resolem $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$. Punts: $(2, 0)$ i $(3, 0)$.
b) Eix Y: $(0, 0)$. Eix X: resolem $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$. Punts: $(0, 0), (2, 0)$ i $(-2, 0)$.

Solució Exercici 8.

a) Igualem: $x^2 - 4x + 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$. Les solucions són $x = 0$ i $x = 5$. Substituint per trobar la y, obtenim els punts $(0, 3)$ i $(5, 8)$.
b) Significa que la paràbola i la recta comparteixen exactament aquests dos punts en el pla cartesià.

Solució Exercici 9.

Eix Y: $(0, 36)$.
Eix X: resolem $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Fem el canvi $t = x^2 \Rightarrow t^2 - 13t + 36 = 0$. Obtenim $t = 4$ i $t = 9$. Desfent el canvi $x = \pm\sqrt{4}$ i $x = \pm\sqrt{9}$. Els punts són $(2, 0), (-2, 0), (3, 0)$ i $(-3, 0)$.

Solució Exercici 10.

Igualem $x^4 - 3x^3 = 4x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0$. Traiem factor comú: $x^2(x^2 - 3x - 4) = 0$.
D'aquí $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. La resta surt de $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ i $x = -1$.
Substituïm els valors de x en qualsevol de les funcions originals (per exemple a $g(x)$) per trobar la coordenada y: per $x = 0 \Rightarrow y = 0$; per $x = 4 \Rightarrow y = 64$; per $x = -1 \Rightarrow y = 4$.
Els punts de tall són: $(0, 0), (4, 64)$ i $(-1, 4)$.

Solució Exercici 11.

a) La coordenada x del vèrtex és $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0$. Substituint, $y_v = -4$. El vèrtex és $V(0, -4)$.
b) Tall eix Y: $f(0) = -4 \Rightarrow (0, -4)$ (coincideix amb el vèrtex). Tall eix X: resolem $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Els punts són $(2, 0)$ i $(-2, 0)$.
c) (Representació gràfica a càrrec de l'alumne).

Solució Exercici 12.

a) Vèrtex: $x_v = \dfrac{-2}{-2} = 1$; $y_v = -(1)^2 + 2(1) + 3 = 4 \Rightarrow V(1, 4)$.
Tall eix Y: $(0, 3)$.
Tall eix X: $-x^2 + 2x + 3 = 0$. Usant la fórmula obtenim $x = 3$ i $x = -1$. Punts: $(3, 0)$ i $(-1, 0)$.
b) Com que el coeficient de la x^2 és negatiu ($a = -1$), les branques van cap avall (és una paràbola còncava).
c) (Representació gràfica a càrrec de l'alumne).

Solució Exercici 13.

a) Vèrtex de $p(x)$: $x_v = \dfrac{4}{2} = 2$, $y_v = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow V_p(2, -1)$.
Vèrtex de $q(x)$: $x_v = \dfrac{-2}{-2} = 1$, $y_v = -1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow V_q(1, 4)$.
b) Igualem: $x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$. Traiem factor comú: $2x(x - 3) = 0$. Obtenim dues solucions: $x = 0$ i $x = 3$.
Substituint $x = 0$ a qualsevol equació obtenim $y = 3$. El punt és $(0, 3)$.

Substituint $x = 3$ obtenim $y = 0$. El punt és $(3, 0)$.
Els punts de tall són $(0, 3)$ i $(3, 0)$.
c) (Representació conjunta a càrrec de l'alumne).

Solució Exercici 14.

a) Vèrtex: $x_v = \dfrac{2}{2 \cdot (1/2)} = 2$, $y_v = f(2) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow V\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$.
Tall eix Y: $(0, \dfrac{3}{2})$. Tall eix X: igualant a 0 i multiplicant tota l'equació per 2 queda $x^2 - 4x + 3 = 0$. Les solucions són $x = 1$ i $x = 3 \Rightarrow$ Punts: $(1, 0)$ i $(3, 0)$.

b) Vèrtex: $x_v = \dfrac{-2/3}{2 \cdot (-1/3)} = 1$, $y_v = g(1) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow V\left(1, \dfrac{4}{3}\right)$.
Tall eix Y: $(0, 1)$. Tall eix X: igualant a 0 i multiplicant per -3 queda $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les solucions són $x = 3$ i $x = -1 \Rightarrow$ Punts: $(3, 0)$ i $(-1, 0)$.

c) Vèrtex: $x_v = \dfrac{5/2}{2} = \dfrac{5}{4}$, $y_v = h\left(\dfrac{5}{4}\right) = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{5}{4}\right) + 1 = \dfrac{25}{16} - \dfrac{25}{8} + 1 = -\dfrac{9}{16} \Rightarrow V\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{9}{16}\right)$.
Tall eix Y: $(0, 1)$. Tall eix X: igualant a 0 i multiplicant per 2 queda $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Les solucions són $x = 2$ i $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Punts: $(2, 0)$ i $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Solució Exercici 15.

a) Inequació: $-2 \leq x < 3$. Interval: $[-2, 3)$.
b) Inequació: $x \leq -1$ o $x > 2$. Interval: $(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$.

Solució Exercici 16.

a) $(-4, +\infty)$
b) $[0, 8)$
c) $(-\infty, -2] \cup (5, +\infty)$
d) $[3, 10)$

Solució Exercici 17.

Creixent: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
Decreixent: $(-2, 2)$.

Solució Exercici 18.

a) És una recta amb pendent positiu ($m = 3$). Creixent a tot $\mathbb{R}$: $(-\infty, +\infty)$.
b) Paràbola amb $a > 0$ (forma d'U). Vèrtex a $x = \dfrac{4}{2} = 2$. Decreixent a $(-\infty, 2)$ i creixent a $(2, +\infty)$.

c) Paràbola amb $a < 0$ (forma de campana). Vèrtex a $x = \dfrac{12}{-4} = -3$. Creixent a $(-\infty, -3)$ i decreixent a $(-3, +\infty)$.

Solució Exercici 19.

a) Talls eix X: $-x^2 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$. Com que té forma de campana, està per sobre de l'eix X entre els talls: Positiva a $(1, 5)$.
b) Vèrtex: $x_v = \dfrac{-6}{-2} = 3$. Puja fins al vèrtex: Creixent a $(-\infty, 3)$.
c) L'interval de positivitat mira quins valors de x donen una altura (imatge) superior a zero. L'interval de creixement analitza quins valors de x fan que la corba vagi pujant de dreta a esquerra, independentment de si està per sobre o per sota de l'eix X.

Solució Exercici 20.

a) S'observa que les gràfiques es tallen a $x = -2$ i a $x = 1$. Els punts són $(-2, 0)$ i $(1, 3)$.
b) La paràbola $f(x)$ està per sobre de la recta $g(x)$ entre els dos punts de tall. L'interval (obert, ja que la desigualtat és estricta) és $(-2, 1)$.
c) La paràbola està per sota o igualant la recta en els extrems exteriors als punts de tall. L'interval és $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

Solució Exercici 21.

a) Igualem: $x^2 - 4x + 3 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$. Traient factor comú $x(x-3) = 0$, obtenim els talls $x = 0$ i $x = 3$. La recta real queda dividida en tres intervals: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ i $(3, +\infty)$.
b) Provant un valor de l'interval $(0, 3)$, per exemple $x = 1$: $p(1) = 0$ i $r(1) = 2$. Com que $0 < 2$, l'interval compleix la condició.
(Si provem $x = -1$ dóna $8 \not< 4$, i si provem $x = 4$ dóna $3 \not< -1$).
c) La solució on $p(x) < r(x)$ és l'interval obert $(0, 3)$.

Solució Exercici 22.

a) Si $x = 2$ és solució, dividim el polinomi per $(x-2)$. El quocient és $x^2 - 2x - 3 = 0$. Resolent l'equació de segon grau resultant obtenim $x = 3$ i $x = -1$.
Les solucions totals són: $x = 2, x = 3, x = -1$.

b) Si $x = 1$ és solució, dividim per $(x-1)$. El quocient és $x^2 - 2x - 8 = 0$. Resolent l'equació de segon grau obtenim $x = 4$ i $x = -2$.
Les solucions totals són: $x = 1, x = 4, x = -2$.

Solució Exercici 23.

a) Dividim successivament per $(x-1)$ i per $(x+1)$. El quocient final és $x^2-5x+6=0$. Les arrels d'aquesta equació de segon grau són $x=2$ i $x=3$.
Les solucions totals són: $x=1, x=-1, x=2, x=3$.

b) Dividim successivament per $(x+1)$ i per $(x-2)$. El quocient final és $x^2-x-6=0$. Les arrels d'aquesta equació de segon grau són $x=3$ i $x=-2$.
Les solucions totals són: $x=-1, x=2, x=3, x=-2$.

Solució Exercici 24.

a) Provem divisors de 30: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5\dots$ Trobem que $x=2$ fa que l'equació doni zero $(8-16-22+30=0)$. Dividint per $(x-2)$ ens queda el quocient $x^2-2x-15=0$. Les altres solucions són $x=5$ i $x=-3$.
Solucions totals: $x=2, x=5, x=-3$.

b) Provem divisors de 18. Trobem que $x=3$ fa que l'equació doni zero $(27-36-9+18=0)$. Dividim per $(x-3)$ i obtenim $x^2-x-6=0$. Resolent-ho, obtenim $x=3$ de nou (arrel doble) i $x=-2$.
Solucions totals: $x=3$ (doble), $x=-2$.